# ПОЯСНЕННЯ ДО ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ ПРОБНОГО ТЕСТУВАННЯ «ЗІГЗАГ»-2015

1. **В.** *Пояснення:* $3\frac{5}{7}\cdot 1\frac{8}{13}+\frac{1}{5}=\frac{26}{7}\cdot\frac{21}{13}+\frac{1}{5}=6+\frac{1}{5}=6\frac{1}{5}$
2. **А.***Пояснення:*нехай $n$- градусна міра центрального кута , $l$- довжина дуги, тоді за означенням $l=\frac{\pi R}{180°}\cdot n$, а за умовою задачі $l=\frac{2}{3}\cdot 2\pi R$. Прирівняємо праві частини обох рівнянь: $\frac{\pi R}{180°}\cdot n=\frac{2}{3}\cdot 2\pi R\Rightarrow\frac{\pi Rn}{180°}=\frac{4\pi R}{3}\Rightarrow\frac{n}{180°}=\frac{4}{3}\Rightarrow n=\frac{180°\cdot 4}{3}=240°$.
3. **Б.** *Пояснення:*нехай$x$ – кількість учениць, тоді кількість учнів-$5x$. Значить загальна кількість учнів $x+5x=6x$. Залишається зауважити, що $x$ – це ціла величина. Отже число, яке може виражати загальну кількість дітей, які навчаються в «РГ ЗІГЗАГ», повинно бути кратним 6, тобто при діленні не буде остачі. Таким числом є 84.
4. **А.** *Пояснення:*якщо a<0$\Rightarrow |a-1|=1-a$і $|a|=-a$. Отже: $\sqrt{4(a-1)^2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}}=2|a-1|-\left|\frac{a}{2}\right|=2-2a+\frac{a}{2}=2-1{,}5a$.
5. **В.** *Пояснення:*скористаємось достатньою умовою зростання функції: якщо $f'(x)\geq 0$, то на проміжку функція $f(x)$ зростає.Маємо $f'(x)\geq 0$при $x\in(-11;-10]\cup[-7;-1]\cup[2;3)$. Отже функція $f(x)$ зростає при$x\in(-11;-10]\cup[-7;-1]\cup[2;3)$.
6. **Г.** *Пояснення:*оскільки$\log_{2500} sin^{50}x$знаходиться під коренем парного степеня, то $\log_{2500} sin^{50}x\geq 0$. Ця нерівність виконується при умові, що $sin^{50}x\geq 1$. Використовуючи властивість що $0\leq sin^{50}x\leq 1$, маємо що нерівність $sin^{50}x\geq 1$ перетворюється в рівняння $sin^{50}x=1\Rightarrow \sin x=\pm 1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\epsilon Z$.
7. **Б.** *Пояснення:*$(x^2-9)\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow(x-3)(x+3)\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}=0$. ОДЗ:$\begin{cases}x+2\geq 0\\x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -2\\x\geq 1\end{cases}\Rightarrow x\geq 1$. Отже, враховуючи ОДЗ маємо два кореня $x_1=1, x_2=3$. Корені $x=-3, x_2=-2$не підходять за ОДЗ.
8. **В.** *Пояснення:*$tg10^{\circ}tg80^{\circ}+ctg20^{\circ}ctg70^{\circ}$=$tg10^{\circ}tg(90°-10°)+ctg20^{\circ}ctg(90°-20°)=tg10^{\circ}ctg10^{\circ}+ctg20^{\circ}tg20^{\circ}=1+1=2$.
9. **А.** *Пояснення:*використовуючи формулу віднімання векторів,можна знайтикоординативектора $\vec{n}$: $n_x=3a_x-4b_x$; $n_y=3a_y-4b_y$.Підставивши координати вектора $\vec{a}$ та $\vec{b}$, отримаємо $n_x=3\cdot 1-4\cdot(-1)=7$; $n_y=3\cdot(-2)-4\cdot 3=-18$. Модуль вектора $\vec{n}$=$\sqrt{n_x^2+n_y^2}$=$\sqrt{7^2+(-18)^2}$=$\sqrt{49+324}=\sqrt{373}$.
10. **Б.** *Пояснення:*Оскільки основи логарифмів однакові, то можемо прирівняти логарифмічні вирази
$\log_3(x^2-2x-2)=\log_3(3x-8)\Rightarrow x^2-2x-2=3x-8\Rightarrow x^2-2x-2-3x+8=0\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow(x-2)\cdot(x-3)=0$. Знаходимо корені рівняння: $x_1=2$; $x_2=3$.Підставимо отримані корені в рівняння. Корінь $x_1=2$є стороннім, оскільки при ньому логарифмічні вирази від'ємні. Тому коренем може бути лише число 3.
11. **Д.** *Пояснення:*Виразимо показник степеню через одну функцію
$2cos^2x-sin^2x=2cos^2x-(1-cos^2x)=2cos^2x-1+cos^2x=3cos^2x-1$. Оцінимо значення, які може приймати показник степеню $-1\leq cosx\leq 1\Rightarrow 0\leq cos^2x\leq 1\Rightarrow 0\leq 3cos^2x\leq 3\Rightarrow -1\leq 3cos^2x-1\leq 2$.Отже область значень $E(y)\in[3^{-1};3^2]$, тобто $E(y)\in\left[\frac{1}{3};9\right]$
12. **А.** *Пояснення:*Об'єм першого циліндра$V_1=\pi R_1^2H_1$ ,об'єм другого циліндра$V_2=\pi R_2^2H_2$. За умовами задачі $R_1=2R_2$, а $3H_1=H_2$. Отже $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R_1^2H_1}{\pi R_2^2H_2}=\frac{\pi 4R_2^2H_1}{\pi R_2^2 3H_1}=\frac{4}{3}$.
13. **Б.** *Пояснення:*твердження **А** невірне (навколо ромба можна описати коло тільки в тому випадку, якщо цей ромб є квадратом). Твердження **Б** - вірне. Твердження **В**– невірне. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом - основна властивість

ромба. Твердження **Г** – невірне (Площа ромба дорівнює добутку квадрата його сторони на синус гострого кута).Твердження **Д**– невірне (Послідовно з'єднані відрізками середини сусідніх сторін ромба утворюють прямокутник)

**14. Г.***Пояснення:* ОДЗ: $x \neq -5$. Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Для цього потрібно намалювати «змійку», нанести на неї точки -5 та 2 (точка -5 виколота через те, що вона є нулем знаменника) та заштрихувати відповідний проміжок (в даній нерівності – із знаком «+»). Таким чином $x \in (-5; 2]$

**15. Д.***Пояснення:* шукана відстань –це довжина бічної сторони рівнобедреного трикутника, вершиною якого є точка перетину діагоналей однієї грані, а основа цього трикутника-діагональ протилежної грані. Нехай $KLM$цей трикутник, де $KM$-основа, $KM = a\sqrt{2}$ (як діагональ квадрата). Проведемо висоту $LN$, вона дорівнює довжині ребра куба ($LN = a$). Оскільки трикутник рівнобедрений, то висота є одночасно і бісектрисою, і медіаною. Звідси $KN = NM = \frac{KM}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Розглянемо трикутник $LNM$ ($\angle LNM = 90°$). $LM$-шукана відстань. Тоді за теоремою Піфагора: $LM = \sqrt{LN^2 + NM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

**16. Г.***Пояснення:*Розпишемо $sin2x$за формулою синусу подвійного кута. Маємо:
$3\cos x - \sin 2x = 0 \Rightarrow 3cosx - 2sinxcosx = 0 \Rightarrow cosx(3 - 2sinx) = 0$. Звідси $cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$або$3 - 2sinx = 0 \Rightarrow sinx = \frac{3}{2} \Rightarrow$
рівняннякоренівнемає, бозаозначенням$sinx \in [-1; 1]$. Отже $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

***17.* Г.** *Пояснення:*$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_0^4 (2x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (2x+1)^{-\frac{1}{2}} d(2x+1) = \frac{1}{2} \cdot 2(2x+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x+1}\,\Big|_0^4 = \sqrt{2 \cdot 4 + 1} - \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 3 - 1 = 2$

***18.* А.** *Пояснення:*Порядок деталей нас не цікавить, тому будемо користуватися формулою комбінації. Оскільки в ящику 10 пофарбованих і 5 непофарбованих деталей, то дві пофарбовані деталі вибирають з 10, а одну непофарбовану – з 5. Так як потрібно витягти і пофарбовані деталі, і непофарбовані користуємось правилом добутку. Отже, $C_{10}^2 \cdot C_5^1 = \frac{10!}{(10-2)!\cdot 2!} \cdot \frac{5!}{(5-1)!1!} = \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} \cdot \frac{5}{1} = 225$

**19. В.** *Пояснення:*Знайдемо похідну $f'(x) = 6x^2 + 3e^{3x-3}$.Підставимо$x_0 = 1$ замість $x$. Маємо $6 \cdot 1^2 + 3e^0 = 6 + 3 = 9$, бо $e^0 = 1$ за означенням.

**20. В.** *Пояснення:*Представимо 243 як $3^5$, тоді $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{243} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^5$. Основи однакові, тому можемо порівняти показники степеню. Оскільки $\frac{1}{3} < 1$, то порівнюючи показники змінюємо знак на протилежний $2x + 1 \geq 5 \Rightarrow 2x - 4 \geq 0 \Rightarrow 2(x-2) \geq 0 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

**21. 1 – Г, 2 – Д, 3 – А, 4 – В.** *Пояснення:*
**1**$x^2 - 10x\sqrt{x} + 9x = 0 \Rightarrow x(x - 10\sqrt{x} + 9) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 0}$ або $x - 10\sqrt{x} + 9 = 0 \Rightarrow$ введемо заміну $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 9 \Rightarrow$
повертаємось до початкової змінної $\sqrt{x} = 1$ або $\sqrt{x} = 9 \Rightarrow \boldsymbol{x_2 = 1, x_3 = 81}$;
**2**$lg^4x - 5lg^2x + 4 = 0 \Rightarrow$ введемозаміну$t = lg^2x \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 4 \Rightarrow$ повертаємось до початкової змінної $lg^2x = 1, lg^2x = 4 \Rightarrow lgx = \pm 1, lgx = \pm 2 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = \frac{1}{10}, x_2 = 10, x_3 = \frac{1}{100}, x_4 = 100}$;
**3**$sin\frac{x}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \Rightarrow x = 4\pi + 16\pi k, k \in Z \Rightarrow$
навідрізку$[0; 2\pi]$ коренів немає;
**4**$2^{|x-1|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow 2^{|x-1|} = 2^3 \Rightarrow$
основиоднакові, томуможемоприрівнятипоказникистепеню$|x - 1| = 3 \Rightarrow x - 1 = -3$ або$x - 1 = 3 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -2, x_2 = 4}$

**22. 1–Б, 2–Д, 3–А, 4 – В.** *Пояснення:* **1** $\alpha = 80°$ (зовнішні різносторонні кути); **2**$\beta = 180° - \alpha = 180° - 80° = 100°$ (як суміжні кути); **3**$\gamma = 180° - 150° = 30°$ (як зовнішні односторонні); **4**$\varphi = 45° + \alpha = 45° + 80° = 125°$(випливає з трикутника, який утворенийпрямими *pkl*)

**23. 1-Г, 2-А, 3-В, 4-Б.** *Пояснення:* **1** ОДЗ: $\begin{cases} \frac{1}{x-3} \geq 0 \\ 2x^2 - 7x - 4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 > 0 \\ 2(x-4)\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x > 3 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x \in [4; +\infty)$; **2** $x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow$Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Для цього потрібно намалювати «змійку», нанести на неї точки 0 та 1 та заштрихувати відповідний проміжок (в даній нерівності – із знаком «+»)$\Rightarrow x \in [0; 1]$; **3** ОДЗ: $\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ \lg(x-2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \\ x - 2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow x > 2, x \neq 3 \Rightarrow$ $x \in (2; 3) \cup (3; +\infty)$; **4**ОДЗ: $\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x + 4 > 0 \\ x^2 - 8x + 7 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x > -4 \\ (x-1)(x-7) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > -4, x \neq 1, x \neq 7 \Rightarrow x \in (-4; 1) \cup (1; 7) \cup (7; +\infty)$

**24. 1-В, 2-А, 3-Д, 4-Г** *Пояснення:* **1** Якщо точка В, симетрична точці А відносно площини *yz*, то її координата по осі $OX$зміниться на протилежну, тобто В(2;3;4); **2**Якщо точка С, симетрична точці А відносно площини *zx*, то її координата по осі $OY$зміниться на протилежну, тобто С(-2;-3;4); **3**Якщо точка D, симетрична точці В відносно площини *xy*, то її координата по осі $OZ$зміниться на протилежну, тобто D(2;3;-4); **4** Якщо точка Е, симетрична точці С відносно площини *yz*, то її координата по осі ОХзміниться на протилежну, тобто В(2;-3;4)

**25. 25.1. 0,5. 25.2. 5.** *Пояснення:*1) $b_4 = b_1 \cdot q^3 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{54} \Rightarrow b_1 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{54} \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

2)$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{121}{162} \Rightarrow \frac{3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{4} = \frac{121}{162} |\times 2 \Rightarrow \frac{3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{2} = \frac{121}{81} \Rightarrow 243\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 242 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{242}{243} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{243} \Rightarrow \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^5} \Rightarrow 3^n = 3^5 \Rightarrow n = 5$

**26. 26.1. 6. 26.2. 1,9.** *Пояснення:*1) За властивістю кола, описаного навколо прямокутника $R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{4^2+(8\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{16+128}}{2} = \frac{12}{2} = 6$см, де $R$-радіус описаного кола, $d$-діагональ прямокутника. 2) За властивістю кола, вписаного в ромб $r = \frac{d_1 d_2}{4a} = \frac{4\cdot 8\sqrt{2}}{4\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{4+32}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{4\cdot 1{,}4}{3} \approx 1{,}9$ см, де r-радіус вписаного кола, $d_1$ і $d_2$-діагоналі ромба, $a$–сторона ромба.

**27. 3**.*Пояснення:* $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64} \\ 2^{x^2-6x-3{,}5} < 8\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2^x 2^{-3x}}{3^x 3^{-2x}} > \frac{3^3}{2^6} \\ 2^{x^2-6x-3{,}5} < 2^{3{,}5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2^{-2x}}{3^{-x}} > \frac{3^3}{2^6} \\ x^2 - 6x - 3{,}5 < 3{,}5 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{3^x}{2^{2x}} > \frac{3^3}{2^6} \\ x^2 - 6x - 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ (x+1)(x-7) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ -1 < x < 7 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow x \in (-1; 3). S = 0 + 1 + 2 = 3$

**28. 18.***Пояснення:*нехай $c_1$–концентрація першого розчину кислоти, $c_2$-концентрація другого. Якщо змішати ці розчини, утвориться розчин, який містить 68% кислоти: $30c_1 + 20c_2 = 50 \cdot 0{,}68$. Якщо ж змішати однакові маси цих розчинів, утвориться 70%-й розчин кислоти. $mc_1 + mc_2 = 2m \cdot 0{,}7$.Складемо і розв'яжемо

систему $\begin{cases} mc_1 + mc_2 = 2m \cdot 0{,}7 \\ 30c_1 + 20c_2 = 50 \cdot 0{,}68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1{,}4 \\ 30c_1 + 20c_2 = 34 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} c_2 = 1{,}4 - c_1 \\ 30c_1 + 20(1{,}4 - c_1) = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1{,}4 - c_1 \\ 10c_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0{,}8 \\ c_1 = 0{,}6 \end{cases}$. Тоді $m_1 = 30 \cdot 0{,}6 = 18$ кг

***29.*** **11.***Пояснення:* $3 \cdot 7^{\frac{2}{log_{\sqrt{2}} 7} + \frac{1}{3} log_7 8} - 3\, log_9 \sqrt[4]{9\sqrt[3]{9}} = 3\left(7^{2\log_7 \sqrt{2}} \cdot 7^{\log_7 8^{\frac{1}{3}}}\right) -$
$3 \log_9 9^{\frac{4}{12}} = 3(2 \cdot 2) - 3 \cdot \frac{4}{12} = 12 - 1 = 11$

**30.** **120.***Пояснення:* нехай $AC$-більша діагональ основи призми, $BD$- менша діагональ основи призми, $a$-сторона ромба, $r$- радіус циліндра, вписаного в призму, $H$–висота циліндра. Маємо: $AC = 24$см, $AB = BC = CD = AD = 13$ см, $H = a = 13$ см. З властивості ромба $r = \frac{AC \cdot BD}{4a}$. $BD = 10$см (з трикутника $BCD$).Звідси $r = \frac{24 \cdot 10}{4 \cdot 13} = \frac{60}{13}$. $S_{\text{б.п.}} = 2\pi r H = 2\pi \frac{60}{13} \cdot 13 = 120\pi$см$^2$.Отже, $\frac{S_{\text{б.п.}}}{\pi} = \frac{120\pi}{\pi} = 120$см$^2$